

Prof. Dr. Alfred Toth

Quantitäten, Qualitäten und Maße

1. Beginnen wir mit dem elementaren Axiom der Arithmetik, wonach man nur gleiche Qualitäten addieren kann, also etwa

$$1 \text{ Apfel} + 1 \text{ Apfel} = 2 \text{ Äpfel.}$$

Man nennt dies Qualitätserhaltung. Dagegen liegt Qualitätsverlust vor, sobald man versucht, verschiedene Qualitäten zu addieren

$$1 \text{ Apfel} + 1 \text{ Birne} = 2 \text{ (Früchte),}$$

worin „Früchte“ sehr schön den Satz von Hegel aus der Großen Logik illustriert, wonach die Logik (und die auf ihre aufgebaute Mathematik) „alle Qualitäten bis auf die eine Qualität der Quantität“ reduziert.

Allerdings ist es wichtig, daß das arithmetische Axiom das Addieren von gleichen Qualitäten vorschreibt und nicht etwa das Addieren verschiedener Qualitäten verbietet, denn sonst würden Gleichungen wie die folgende dem Axiom widersprechen

$$1 \text{ Jonathan-Apfel} + 1 \text{ Glockenapfel} = 2 \text{ (?) Äpfel,}$$

denn hier zeigt „Äpfel“ bereits eine Form von Qualitätsreduktion, wie sie schließlich bei „Früchte“ maximal erreicht ist. Weitere Qualitätsreduktion sind ausgeschlossen, vgl. die unlösbare Gleichung

$$1 \text{ Apfel} + 1 \text{ Kürbis} = ?$$

Es muß somit eine thematische „Familienähnlichkeit“ selbst bei Qualitätsverlust bestehen, d.h. eine semiotisch iconische Relation, die im Falle von Qualitätserhaltung maximal und im Falle von Qualitätsverlust minimal ist und somit ein semantisches Intervall voraussetzt, das bis heute erst in Ansätzen untersucht ist (vgl. Toth 2017), vgl. auch

$$1 \text{ großer Apfel} + 1 \text{ kleiner Apfel} = 2 \text{ (?) Äpfel.}$$

2. Es gibt nun aber, neben dieser Dichotomie von Quantität und Qualität, noch einen Spezialfall, der einen dazu führt, diese Dichotomie in eine Trichotomie zu überführen, vgl.

20 Äpfel + 1 Kiste = 1 Kiste Äpfel.

Hier erscheinen in der Summe beide qualitativ verschiedenen Objekte. Allerdings funktioniert dieser Fall nur bei einer – allerdings nicht determinierbaren – Menge von Quantität des einen der beiden Objekte, denn keine der beiden folgenden Gleichungen ist sinnvoll

1 Apfel + 1 Kiste = ?

1 Apfel + 2 Kisten = ?

Ferner gibt es neben diesen semiotischen, d.h. ähnlichkeitstheoretischen, Voraussetzungen, welche das elementare Axiom der Arithmetik stillschweigend voraussetzt, auch eine ontische Voraussetzung, die den Mathematikern ebenso unbewußt ist und das wohl noch wesentlicher ist als es die semiotischen Voraussetzungen sind: Gleichungen des letzteren Typs sind nur dann möglich, wenn einer der Summanden ontisch gesehen exessiv ist, also etwa eine Kiste, eine Büchse, eine Schachtel oder ein ähnliches „Behältnis“.

Vgl. dagegen bei Adessivität

20 Bücher + 1 Regal = *1 Regal Bücher

und bei Inessivität

1 Tisch + 1 Raum = *1 Raum Tisch.

(Der Asterisk zeigt hier nicht die Ungleichung, sondern die Sinnlosigkeit dieser Gleichungen an.)

Damit kommen also von den drei in Toth (2012) definierten Teilrelationen der ontischen Lagerrelation nur die exessive Relation in Frage. Dies führt dann, wie man leicht feststellen kann, dazu daß diese in exessiver Relation stehenden Objekte als Maße dienen. Wie man gesehen hat, können sie dann sogar in Fällen, in denen weder Quantitäts- noch Qualitätserhaltung gilt, zu sinnvollen Gleichungen führen, vgl.

10 Marroni + 1 Papier = ?

10 Marroni + 1 Tüte = 1 Tüte Marroni.

Literatur

Toth, Alfred, Systeme, Teilsysteme und Objekte I-IV. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics 2012

Toth, Alfred, Qualitative Arithmetik. Tucson (AZ) 2017 (416 S.)

18.3.2018